令和3年度 入学試験問題

数学

注意事項

試験開始後，問題冊子のページ及び解答用紙の問題の番号を確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後は，すべての解答用紙に受験番号 (2カ所)・氏名を記入すること。
3. **各志願者は，下の表 (1) に指定した必須問題はすべての問題を解答すること。また，選択問題はいずれか1問を解答すること。** ただし，**教育学部**については志望するコース（系）により，下の表 **(2)** のように分類する。
4. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。なお，**選択問題については，選択する場合は解答用紙左上にある選択欄に○を，選択しない場合は × を記入すること。**
5. 解答用紙は持ち出さないこと。

表 (1) (選択問題は 1 問を解答すること)

	必須問題	選択問題
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	1　2	
教育学部B 薬学部 歯学部 工学部	3　4　5	7　8
医学部	3　4　6	9　10
情報データ科学部	3　4　5	7　8　11

表 (2)

分類	志望するコース（系）
教育学部A	小学校教育コース 幼児教育コース 特別支援教育コース 中学校教育コース（実技系）
教育学部B	中学校教育コース（理系）

1 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $y = \sin 2x - 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ がある。

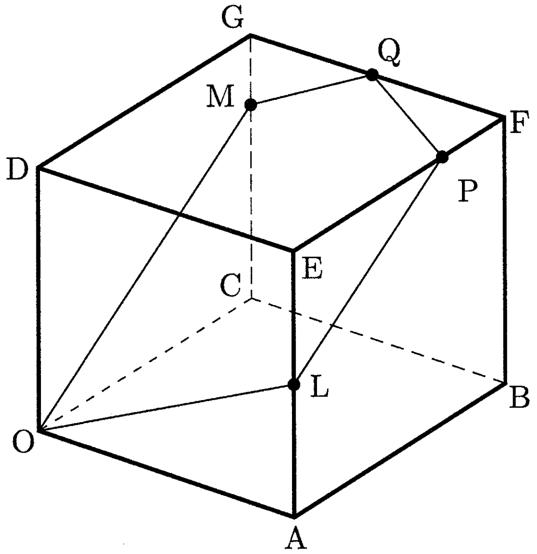
$\sin x + \cos x = t$ とおくとき，t の値の範囲を求め，y を t の式で表せ。また，関数 y の最大値と最小値，およびそのときの t と x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 原点を O とする xy 座標平面上に円 C : $x^2 + y^2 = 5$ と直線 l : $x + 3y - 5 = 0$ がある。円 C と直線 l との 2 つの交点 A, B（A の x 座標は，B の x 座標より小さい）における接線をそれぞれ l_1, l_2 とし，l_1 と l_2 との交点を P とする。このとき，l_1, l_2 の式および点 P の座標を求めよ。また，直線 OP と円 C の交点を Q, R とするとき，線分の長さの積 $\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{PR}$ を求めよ。

(3) t の関数 $S(t)$ を，$S(t) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - t^2|\,dx$ とする。このとき，$S(1)$ の値を求めよ。また，$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の最大値と最小値，およびそのときの t の値を求めよ。

（下書き用紙）

2 下図のように，1 辺の長さが 1 の立方体 DEFG−OABC がある。点 L は線分 AE を 1 : 1 に，点 M は線分 CG を 3 : 1 に内分する点である。また，3 点 O, L, M を通る平面 T は，辺 EF および辺 GF と 2 点 P, Q で交わる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ。 ただし，(1) については答えのみでよい。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$, および $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ。

(2) $\cos \angle \mathrm{LOM}$ の値，および $\triangle \mathrm{LOM}$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) $\mathrm{EP} : \mathrm{PF} = p : (1-p)$ $(0 < p < 1)$, $\mathrm{GQ} : \mathrm{QF} = q : (1-q)$ $(0 < q < 1)$ とする。このとき，p と q の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。また，五角形 OLPQM の面積 S_2 を求めよ。

（下書き用紙）

$\boxed{3}$ 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 3$ で定義された関数 $y = -2(\log_3 3x)^3 + 3(\log_3 x + 1)^2 + 1$ がある。

関数 y の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(2) 以下で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ \ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ を満たす α, β の値を求めよ。

また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，極限を調べよ。

(3) 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について次の等式を満たしている。

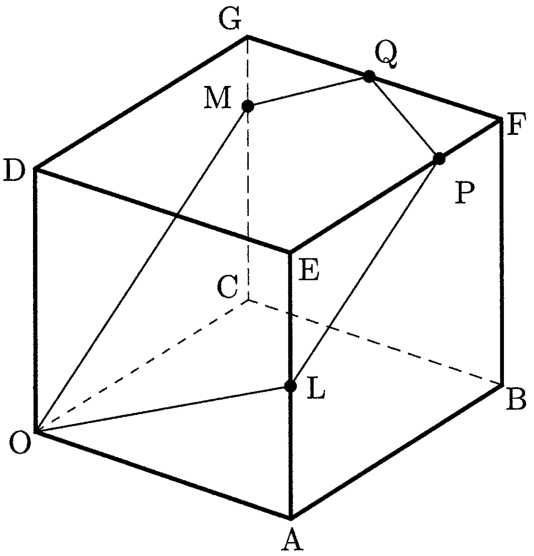
$$f(x) = 2 + \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,dt$$

このとき，$f''(x)$ が定数であることを示せ。

また，$f(0)$ および $f'(0)$ の値から，$f'(x)$ と $f(x)$ をそれぞれ求めよ。

（下書き用紙）

4 下図のように，1 辺の長さが 1 の立方体 DEFG$-$OABC がある。点 L は線分 AE を 1 : 1 に，点 M は線分 CG を 3 : 1 に内分する点である。また，3 点 O, L, M を通る平面 T は，辺 EF および辺 GF と 2 点 P, Q で交わる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，以下の問いに答えよ。 ただし，(1), (2) については答えのみでよい。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$, および $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ。また，$\cos\angle\mathrm{LOM}$ の値，および $\triangle\mathrm{LOM}$ の面積 S_1 を求めよ。

(2) $\mathrm{EP} : \mathrm{PF} = p : (1-p)$ $(0 < p < 1)$, $\mathrm{GQ} : \mathrm{QF} = q : (1-q)$ $(0 < q < 1)$ とする。このとき，p と q の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{LP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。また，五角形 OLPQM の面積 S_2 を求めよ。

(4) 点 D から平面 T に垂線を下ろし，その交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|$ を求め，D を頂点とする五角錐（すい）D$-$OLPQM の体積 V を求めよ。

（下書き用紙）

5 xy 座標平面上の原点を通る 2 直線 $m_1: y = (\tan\theta)x$, $m_2: y = \left(\tan(\theta + \frac{\pi}{4})\right)x$ が，直線 $x = 1$ と交わる点をそれぞれ P, Q とする。ただし，$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{4}$ である。$\tan\theta = t$ とするとき，関数 $f(t)$ を線分 PQ の長さと定義する。以下の問いに答えよ。

(1) t の値の範囲を求め，$f(t)$ を t の式で表せ。

(2) $\theta = -\frac{\pi}{4}$ と $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき，$f(t)$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) $f'(t)$ を求め，$f(t)$ の増減表を作成せよ。また，$l = f(t)$ のグラフの漸近線の式を求め，tl 座標平面上に $l = f(t)$ のグラフの概形をかけ。

(4) $f(t)$ の最小値を求めよ。また，このときの 2 点 P, Q の座標，および θ の値を求めよ。

（下書き用紙）

6 xy 座標平面上に 4 点 A$(0,-1)$, B$(1,-1)$, C$(1,1)$, D$(0,1)$ を頂点とする長方形 ABCD がある。原点を通る 2 直線 m_1 : $y=(\tan\theta)x$, m_2 : $y=\left(\tan(\theta+\frac{\pi}{4})\right)x$ が長方形の辺と交わる点をそれぞれ P, Q とする。ただし，$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ である。$\tan\theta=t$ とするとき，関数 $f(t)$ を以下のように定義する。

$-\frac{\pi}{4}<\theta\leqq 0$ のとき，$f(t)$ は線分 PQ の長さとする。
$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき，$f(t)$ は線分 PC の長さと線分 CQ の長さの和とする。

以下の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を t の式で表せ。

(2) $\theta=\frac{\pi}{8}$ のとき，$f(t)$ の値を求めよ。

(3) $f(t)$ が，$t=0$ で微分可能であるかどうか調べよ。

(4) $f(t)$ の増減表を作成せよ。$\lim\limits_{t\to-1+0}f(t)$, $\lim\limits_{t\to1-0}f(t)$ を求め，$f(t)$ の最大値と最小値，およびこのときの t と θ の値をそれぞれ求めよ。

（下書き用紙）

7 $a > 0$ とし，2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ を，それぞれ以下のように定義する。

$$f(x) = e^x \quad (x \geqq 0)$$
$$g(x) = ax^2 \quad (x \geqq 0)$$

2 つの曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ は，ともに点 P を通り，かつ点 P において共通な直線 l に接しているものとする。点 P の x 座標が p $(p > 0)$ であるとき，以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) a と p の値，および直線 l の式を求めよ。

(2) $x > 0$ において定義される関数 $h(x) = \log f(x) - \log g(x)$ について，$h(x)$ の増減表を作成せよ。また，$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(3) 2 つの曲線 C_1 と C_2 および y 軸とで囲まれる図形 F の面積 S を求めよ。

(4) (3) の図形 F を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

（下書き用紙）

8 自然数 n に対して定まる複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ があり，z_n は以下の式を満たしている。

$$z_{n+1} = \frac{z_n - 2}{2z_n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，z_1 は $|z_1| = 1$ を満たすものとする。また，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $z_{n+1} = z_n$ となる z_n を求めよ。また，$z_{n+1} = -z_n$ となる z_n を求めよ。

(2) すべての n に対して，$|z_n| = 1$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) z_{n+2} を z_n で表せ。また，点 P_1 を定めたとき，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さは，すべての n に対して一定であることを説明せよ。

(4) z_n, z_{n+1} について，$z_n = x + yi$ (x, y は実数), $z_{n+1} = X + Yi$ (X, Y は実数) とする。$X < 0$ かつ $Y > 0$ となるような点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

（下書き用紙）

9 自然数 n に対して定まる複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ があり，z_n は以下の式を満たしている。

$$z_{n+1}=\frac{z_n-2}{2z_n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

ただし，z_1 は $|z_1|=1$ を満たすものとする。また，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して，$|z_n|=1$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) z_{n+2} を z_n で表せ。また，点 P_1 を定めたとき，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さは，すべての n に対して一定であることを説明せよ。

(3) z_n, z_{n+1} について，$z_n=x+yi$ (x,y は実数), $z_{n+1}=X+Yi$ (X,Y は実数) とする。$X<0$ かつ $Y>0$ となるような点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(4) 複素数平面上の原点を O とし，$z_1=a+bi$ ($a>0,b>0$) とする。すべての n に対して，$\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角三角形となるような a と b の値を求めよ。

（下書き用紙）

10 図 1，図 2 のように，原点を O とする xyz 座標空間に扇形 OAB と直円錐(すい)がある。図 1 の扇形 OAB は，線分 OA を半径とし，中心角の大きさを θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする yz 平面上の扇形である。図 2 の直円錐は，線分 OA を母線とし，線分 AC を底面の円の直径とする円錐である。図 1，図 2 の点 A の座標を $\mathrm{A}(0, 3, 0)$，点 C の座標を $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

図 1

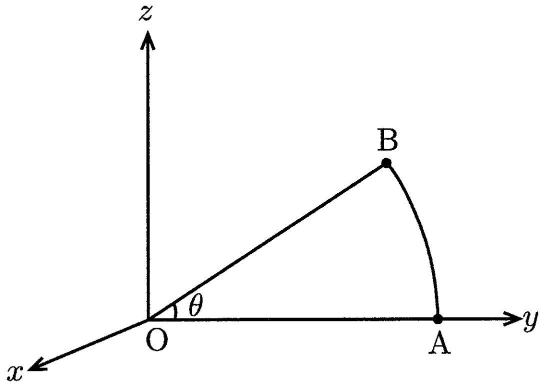
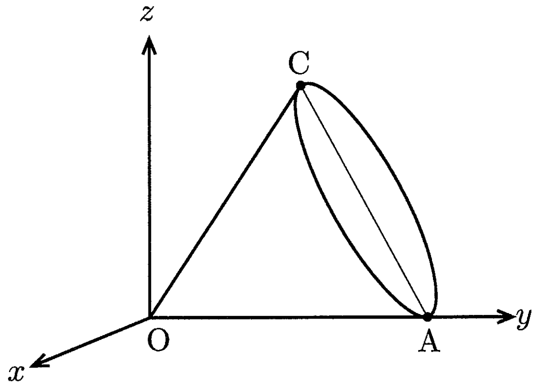


図 2



(1) 図 1 の扇形 OAB を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を T_1 とする。

平面 $y = t$ $(0 \leqq t \leqq 3)$ で T_1 を切ったときの断面積 $S_1(t)$ を t の式で表せ。

(2) (1) の回転体 T_1 の体積 V_1 を求めよ。

(3) 図 2 の直円錐を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を T_2 とする。

平面 $y = t$ $(0 \leqq t \leqq 3)$ で T_2 を切ったときの断面積 $S_2(t)$ を t の式で表せ。

(4) (3) の回転体 T_2 の体積 V_2 を求めよ。

(5) (2) の V_1 と (4) の V_2 の大小を調べよ。

（下書き用紙）

$\boxed{\mathbf{11}}$ 1回投げると，確率 p $(0 < p < 1)$ で表，確率 $1 - p$ で裏が出るコインがある。このコインを投げたとき，動点Pは，表が出れば $+1$, 裏が出れば -1 だけ，数直線上を移動することとする。はじめに，Pは数直線の原点Oにあり，n 回コインを投げた後のPの座標を X_n とする。以下の問いに答えよ。必要に応じて，22ページの正規分布表を用いても良い。

(1) $p = \dfrac{1}{2}$ とする。X_4 と X_5 の確率分布, 平均および分散を，それぞれ求めよ。

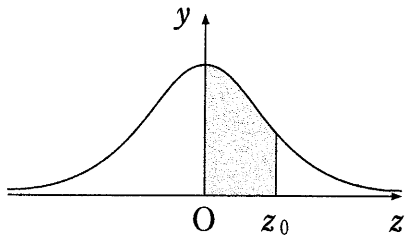
(2) $p = \dfrac{1}{2}$ とする。6回コインを投げて，6回目ではじめて原点Oに戻る確率を求めよ。

(3) X_1 の平均と分散を，それぞれ p を用いて表せ。また，X_n の平均と分散を，それぞれ n と p を用いて表せ。

(4) コインを100回投げたところ $X_{100} = 28$ であった。このとき，p に対する信頼度95 %の信頼区間を求めよ。

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

（下書き用紙）