令 和 5 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

注 意 事 項

試験開始後，問題冊子のページ，及び解答用紙の問題の番号を確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号 (2 カ所)・氏名を記入すること。
3. **各志願者は，下の表 (1) に指示した問題を解答すること。**
   情報データ科学部については，$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$は**必須問題**であり，$\boxed{8}$*$\boxed{9}$*は**選択問題**である。選択問題はいずれか 1 問を選択し解答すること。**選択する場合には，解答用紙左上にある選択欄に ○ を，選択しない場合は × を記入すること。**
   教育学部については，志望するコース（系）により，**下の表 (2)** のように分類する。
4. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に，答えだけではなく途中の説明も記入すること。
5. 解答用紙は持ち出さないこと。

表 (1)　(*印は選択問題を表す。いずれか 1 問を解答すること。)

志望学部	問題の番号
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
教育学部B 薬学部 歯学部 工学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$
医学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
情報データ科学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{8}$* $\boxed{9}$*

表 (2)

分類	志望するコース(系)
教育学部A	小学校教育コース 幼児教育コース 特別支援教育コース 中学校教育コース（実技系）
教育学部B	中学校教育コース（理系）

1 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) x の 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$ がある。曲線 $y = f(x)$ 上における接線の傾きの最小値が -12 になるとき，定数 a の値を求めよ。また，$f(x)$ の極値，およびそのときの x の値を求めよ。

(2) $\triangle$OAB の 3 辺の長さは，それぞれ OA $= 2$, AB $= 3$, BO $= 3$ である。頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし，直線 AB との交点を H とする。また，$\triangle$OAB の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表し，線分 GH の長さを求めよ。

(3) a を定数とするとき，不等式

$$\log_a 5x - \log_a (4 - x) \geqq \log_a (x + 1)$$

を解け。

(4) 整式 $f(x)$ が，すべての実数 x に対して

$$(f'(x) - 5) f'(x) = 3f(x) + x^2 - 7x - 12$$

を満たすものとする。$f(x)$ の次数を n とするとき，n は 3 以上にならないことを示し，$f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ の係数はすべて整数とする。

（下書き用紙）

2 xy 座標平面上に，放物線 $C: y=(x-3)^2$ と直線 $l: y=2x+9$ があり，C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする。以下の問いに答えよ。

ただし，格子点とは，x 座標，y 座標がともに整数になる点をいう。

(1) C と l の 2 つの交点の x 座標を $p, q\ (p<q)$ とするとき，p と q の値をそれぞれ求めよ。また，図形 F に含まれる格子点のうち，x 座標が $k\ (p \leqq k \leqq q,\ k$ は整数$)$ である格子点の個数 a_k を k の式で表せ。さらに，図形 F に含まれる格子点の総数 N を求めよ。

(2) 図形 F に含まれる格子点を $\mathrm{Q}(x, y)$ とするとき，$x+y$ の最大値と最小値，およびそのときの Q の座標をそれぞれ求めよ。

(3) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形のうち，頂点の x 座標が k および $k+1$ (k は整数) である正方形の個数を b_k とする。$b_k \geqq 1$ となる k の値の範囲を求め，b_k を k の式で表せ。

(4) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形の面積の総和 T を求めよ。また，図形 F の面積を S とするとき，$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ。

（下書き用紙）

3 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 次のように，項数 m の 2 つの等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$\begin{array}{ll} \{a_n\} & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ m-2,\ m-1,\ m \\ \{b_n\} & m,\ m-1,\ m-2,\ \cdots,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項を $c_n = a_n b_n$ とするとき，c_n の最大値，および $\sum_{k=1}^{m} c_k$ をそれぞれ m の式で表せ。

(2) $\triangle$OAB の 3 辺の長さは，それぞれ OA $= 2$, AB $= 3$, BO $= 3$ である。頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし，直線 AB との交点を H とする。また，$\triangle$OAB の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表し，線分 GH の長さを求めよ。

(3) $x > 0$ のとき，不等式

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，対数は自然対数とする。

(4) a, b を定数とする。関数 $f(x)$ について，等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

が成り立つことを証明せよ。また，定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}dx$ を求めよ。

（下書き用紙）

4 xy 座標平面上に，放物線 $C : y = (x-3)^2$ と直線 $l : y = 2x + 9$ があり，C と l で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする。以下の問いに答えよ。

ただし，格子点とは，x 座標，y 座標がともに整数になる点をいう。

(1) C と l の 2 つの交点の x 座標を p, q $(p < q)$ とするとき，p と q の値をそれぞれ求めよ。また，図形 F に含まれる格子点のうち，x 座標が k $(p \leqq k \leqq q$，k は整数$)$ である格子点の個数 a_k を k の式で表せ。さらに，図形 F に含まれる格子点の総数 N を求めよ。

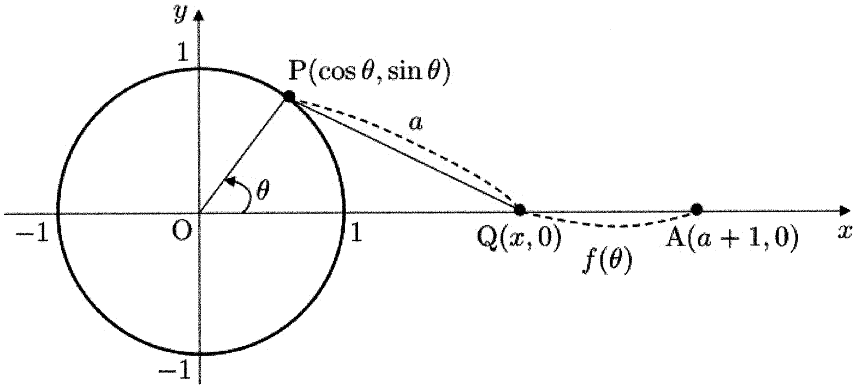
(2) 図形 F に含まれる格子点を $\mathrm{Q}(x, y)$ とするとき，$x + y$ の最大値と最小値，およびそのときの Q の座標をそれぞれ求めよ。

(3) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形のうち，頂点の x 座標が k および $k+1$ (k は整数) である正方形の個数を b_k とする。$b_k \geqq 1$ となる k の値の範囲を求め，b_k を k の式で表せ。

(4) 図形 F に含まれる 4 つの格子点を結んでできる 1 辺の長さが 1 の正方形の面積の総和 T を求めよ。また，図形 F の面積を S とするとき，$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ。

（下書き用紙）

5 下図のように，xy 座標平面上に，原点Oを中心とする単位円周上の動点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と x 軸上の動点 $\mathrm{Q}(x, 0)$ $(x > 0)$ がある。2点P, Q間の距離は a $(a > 1)$ で一定とし，定点 $\mathrm{A}(a+1, 0)$ と動点 $\mathrm{Q}(x, 0)$ の2点間の距離を $f(\theta)$ とするとき，以下の問いに答えよ。ただし，(1) は答えのみでよい。



(1) $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 点Qの x 座標を a, θ を用いて表せ。

(3) $f(\theta)$ を a, θ を用いて表し，$f(\theta)$ の導関数 $f'(\theta)$ を求め，$f(\theta)$ の増減を調べよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$ を求めよ。

（下書き用紙）

6 はじめに，図 1 のように xy 座標平面上に 4 点 P$(0,0)$, Q$(2,0)$, R$(2,2)$, S$(0,2)$ を頂点とする一辺の長さが 2 の正方形 PQRS がある。この正方形を，図 2 のように反時計周りに移動させる。ただし，P が x 軸上を点 $(0,0)$ から点 $(2,0)$ に毎秒 1 の速さで正の方向に動くと同時に，S は y 軸上を点 $(0,2)$ から点 $(0,0)$ に動くものとする。この移動で，2 秒後には図 3 のような状態になる。

この移動を繰り返すことによって，正方形は 8 秒後には図 1 の状態に戻る。以下の問いに答えよ。ただし，(1) は答えのみでよい。

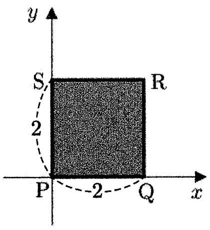


図 1

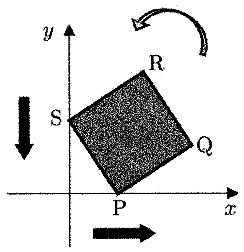


図 2

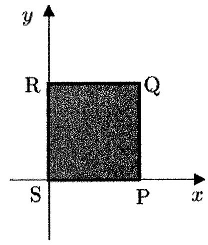


図 3

(1) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における 4 点 P, Q, R, S の座標を，それぞれ t を用いて表せ。

(2) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点 Q(x,y) の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，$t = \sqrt{2}$ のときの Q の速さを求めよ。

(3) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点 Q の x 座標を $f(t)$ とする。$f(t)$ の最大値を求めよ。また，そのときの Q と R の座標を求めよ。

(4) 正方形の対角線の交点を D(x,y) とする。正方形が移動をはじめてから 8 秒間における点 D は，どのような図形上にあるか説明せよ。

(5) 正方形が移動をはじめてから 8 秒間における点 P の軌跡を C とする。C で囲まれる図形の面積 T を求めよ。

（下書き用紙）

7 複素数平面上に原点 O を中心とする単位円 C があり，2 点 A(z_1), B(z_2) は，円 C の周上にある。$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とするとき，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1) z_1 と z_2 の積 z_1z_2 および和 $z_1 + z_2$ を，それぞれ極形式で表せ。

(2) $w = \dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$ で表される点を P(w) とするとき，w を極形式で表せ。
また，原点 O, 点 P(w), 点 D($z_1 + z_2$) の 3 点は，同一直線上にあることを示せ。

(3) 直線 AP は，円 C の接線であることを示せ。

(4) 直線 AB に関して点 P と対称な点を Q(v) とする。点 Q が円 C の周上にあるとき，β を α の式で表せ。

（下書き用紙）

8 * はじめに，図 1 のように xy 座標平面上に 4 点 P$(0,0)$, Q$(2,0)$, R$(2,2)$, S$(0,2)$ を頂点とする一辺の長さが 2 の正方形 PQRS がある。この正方形を，図 2 のように反時計周りに移動させる。ただし，P が x 軸上を点 $(0,0)$ から点 $(2,0)$ に毎秒 1 の速さで正の方向に動くと同時に，S は y 軸上を点 $(0,2)$ から点 $(0,0)$ に動くものとする。この移動で，2 秒後には図 3 のような状態になる。

この移動を繰り返すことによって，正方形は 8 秒後には図 1 の状態に戻る。以下の問いに答えよ。ただし，(1) は答えのみでよい。

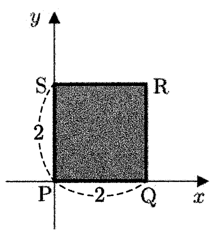


図 1

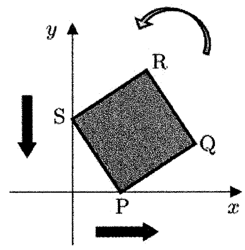


図 2

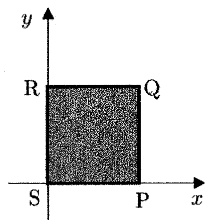


図 3

(1) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における 4 点 P, Q, R, S の座標を，それぞれ t を用いて表せ。

(2) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点 Q(x,y) の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，$t = \sqrt{2}$ のときの Q の速さを求めよ。

(3) 正方形が移動をはじめてから t $(0 \leqq t \leqq 2)$ 秒後における点 Q の x 座標を $f(t)$ とする。$f(t)$ の最大値を求めよ。また，そのときの Q と R の座標を求めよ。

(4) 正方形の対角線の交点を D(x,y) とする。正方形が移動をはじめてから 8 秒間における点 D は，どのような図形上にあるか説明せよ。

(5) 正方形が移動をはじめてから 8 秒間における点 P の軌跡を C とする。C で囲まれる図形の面積 T を求めよ。

（下書き用紙）

9 * ある日の朝，ある養鶏場で無作為に 9 個の卵を抽出して，それぞれの卵の重さを測ったところ，表 1 の結果が得られた。

表 1　養鶏場で抽出した 9 個の卵の重さ（単位はグラム（g））

58	61	56	59	52	62	65	59	68

この養鶏場の卵の重さは，母平均が m, 母分散が σ^2 の正規分布に従うものとするとき，以下の問いに答えよ。必要に応じて 18 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) 表 1 の標本の平均を求めよ。

(2) 表 1 の標本の分散と標準偏差を求めよ。

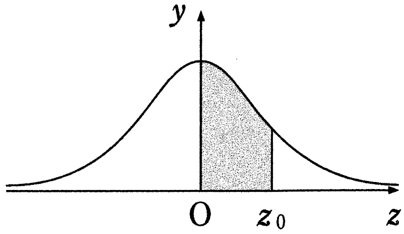
(3) 母分散 $\sigma^2 = 25$ であるとき，表 1 の標本から，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数点第 3 位を四捨五入して求めよ。

(4) この養鶏場のすべての卵の重さからそれぞれ 10 g を引いて，50 g で割った数値は，母平均 m_1, 母分散 ${\sigma_1}^2$ の正規分布に従う。このとき，m_1 と ${\sigma_1}^2$ を，それぞれ m と σ の式で表せ。また，$\sigma^2 = 25$ であるとき，表 1 の標本から，m_1 に対する信頼度 95% の信頼区間を，小数点第 3 位を四捨五入して求めよ。

(5) 次の日の朝に，n 個の卵を無作為に抽出して，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めることとする。信頼区間の幅が 5 以下となるための標本の大きさ n の最小値を求めよ。ただし，母分散 $\sigma^2 = 25$ であるとする。

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

（下書き用紙）

裏面

問 題 訂 正

（数学）

訂正箇所	5ページ $\boxed{3}$ (4) 1行目
誤	(4) a, b を定数とする。関数 $f(x)$ について，等式
正	(4) a, b を定数とする。すべての実数 x で連続な関数 $f(x)$ について，等式