高度な記述式問題（数学）　【サンプル問題】（解答時間７０分）

$\boxed{1}$　図のように番号のついた正方形のマス目を横一列につなげて並べ，そのマス目に区別のできない３個の碁石を置く。ただし，どの碁石も２マス以上間をあけて置くものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

1	2	3	4	5	6	7	8
○			○				○

(1)　1番から8番までの8個のマス目に碁石を並べるとき，並べ方をすべて書け。例えば，図のような並べ方は，(1 , 4 , 8)と表すものとする。

(2)　1番から12番までの12個のマス目に碁石を並べるとき，以下の問いに答えよ。

（ⅰ）　3個のうち一番左にある碁石が1番のマス目にある並べ方は何通りあるか。
また，3個のうち一番左にある碁石が2番のマス目にある並べ方は何通りあるか。

（ⅱ）　並べ方は全部で何通りあるか。

(3)　n を7以上の自然数とする。1番から n 番までの n 個のマス目に碁石を並べるとき，以下の問いに答えよ。

（ⅰ）　3個のうち一番左にある碁石が1番のマス目にある並べ方は何通りあるか。

（ⅱ）　k を $1 \leqq k \leqq n-6$ をみたす自然数とする。3個のうち一番左にある碁石が k 番のマス目にある並べ方は何通りあるか。

（ⅲ）（ⅱ）を利用して，並べ方は全部で何通りあるか。

(4)　(3)については，${}_{(ア)}C_{(イ)}$ として求めることができる。(ア)，(イ)に入る数または数式を求めよ。
また，なぜ ${}_{(ア)}C_{(イ)}$ として求めることができるのか理由を説明せよ。

次の$\boxed{2}$, $\boxed{3}$は選択問題である。
数学ⅠAⅡB 受験者は$\boxed{2}$を，数学ⅠAⅡBⅢ 受験者は$\boxed{3}$を解くこと。

$\boxed{2}$　図1のように，一辺の長さが1の正方形ABCDの辺上に3点P, Q, Rがあり，△PQRは1辺の長さがaの正三角形である。点PはAP$=t$を満たしながら辺AD上を動き，3点P, Q, Rは正方形の辺上をそれぞれ反時計回りに位置しながら動くものとする。ただし $0 \leqq t \leqq 1$ である。

正三角形PQRの面積をSとするとき，以下の問いに答えよ。

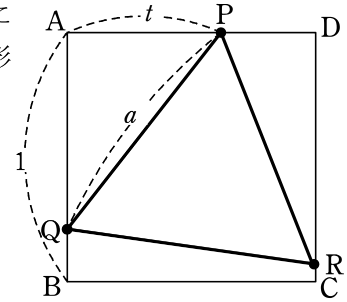

図1

(1)　点Pが辺ADの中点Mの位置にあるとき，aとSの値をそれぞれ求めよ。

(2)　点Pが点Dの位置にあるとき，aとSの値をそれぞれ求めよ。

(3)　点Rが点Cの位置にあるとき，tの値をlとする。lの値を求めよ。

(4)　図2は$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq l$のときである。点Rから辺ABに下ろした垂線の足を点Hとするとき，DR＝AQ＋QHの関係から，a^2とSをtの式で表し，Sの最大値および最小値を求めよ。ただし，lは(3)で求めた値とする。

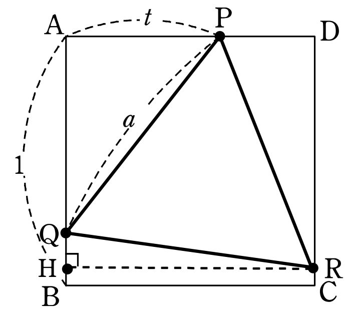

図2

(5)　tの値の範囲が，$0 \leqq t \leqq 1$におけるSの最大値および最小値は，$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq l$ の場合を調べればよい。なぜ，区間$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ と $l \leqq t \leqq 1$ の場合は調べなくてよいのか。

Qの動きに着目して，図3を用いて説明せよ。

ただし，lは(3)で求めた値とする。

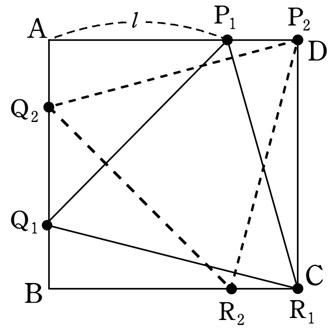

図3

$\boxed{3}$ **図1**は，直角につながる幅 a の廊下 A と幅 b の廊下 B を上から見た様子を表している。今，廊下 A から廊下 B へ，床に水平に保ったまま，まっすぐな棒を運ぶことを考える。**図2**は，**図1**の廊下を xy 平面に表したものであり，点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ を第 1 象限の定点とする。

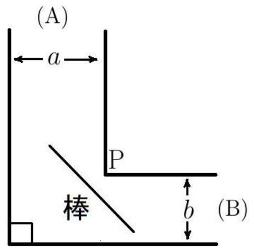

図1

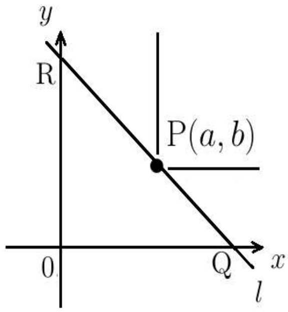

図2

［ I ］　以下の問いに答えよ。

(1)　**図2**において，定点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ を通る傾き $-m$（ただし，$m>0$ ）の直線を l，直線 l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q , R とし，2 点間の距離 QR の平方 $f(m)$ が最小値となる直線を L_1 とする。このとき， $f(m)$ の最小値とそのときの m の値および直線 L_1 の式を求めよ。

(2)　廊下 A から廊下 B へ運ぶことのできる棒の長さの最大値を求めたい。棒の長さの最大値を求めるためには，どのように考えればよいか。あなたの考えを述べ，最大となる棒の長さを求めよ。ただし，棒と廊下との間の摩擦は考えないこととする。

［ II ］定点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ が曲線 C : $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上にあるとする。また，曲線 C が表す関数を $y=g(x)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき， $\dfrac{dy}{dx}$ を θ を用いて表せ。また，点 P における曲線 C の接線 L_2 は，［ I ］(1)で求めた直線 L_1 と一致することを示せ。

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき， $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ を用いて表せ。また，曲線 C を表す関数 $g(x)$ は単調減少であり，そのグラフは下に凸であることを示せ。

(3)　［ I ］(1)で求めた直線 L_1 と曲線 C , x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S を θ を用いて表せ。